٦. مبادئ الاحتمالات
Principles of Probability

(٦-١) مقدمة:

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية. فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم. ويقال أن احتمال نجاح أحمد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح خالد. ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار. ويقال أن من المؤكد موت كل إنسان. ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى الطبيب المعالج ...وهكذا. إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث. ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة حدوث هذه الحوادث. إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد. فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد. وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر. ولتعريف الاحتمال فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والحوادث.

(٦-٢) التجربة العشوائية: Random Experiment:

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
٢. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
٣. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

(٦-٣) فضاء (فراغ) العينة: Sample Space:

- فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.
- نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S.

مثال (٦-١):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
٢. تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

الحل:

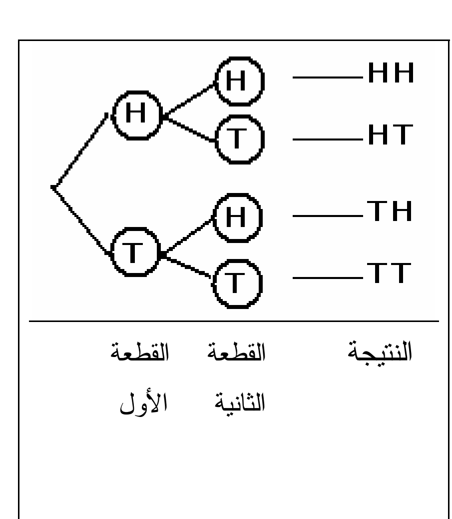
١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:

إن النتائج الممكنة هي H أو T ولذلك فإن فضاء العينة هـو: $S = \{H , T\}$ وعـدد عناصره يساوي: $n(S) = 2$.

٢. تجربة قذف قطعتي النقود معا:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:



إن النتائج الممكنة هي:

(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 4$

ملاحظة:

$S = \{H,T\} \times \{H,T\}$
$= \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

$n(S) = 2 \times 2 = 4$ (باستخدام قاعدة الضرب)

مثال (٦-٢):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكـل رمية.

الحل:

١. تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 6$.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين:

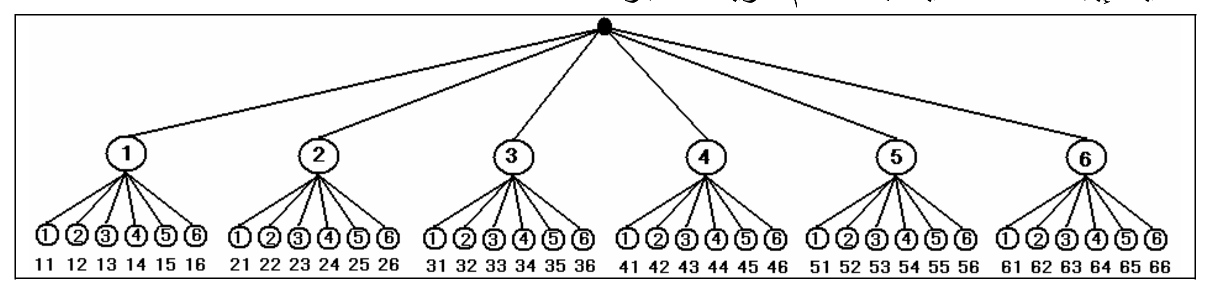
يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطـرق: (١) طريقة حاصل الضرب الديكارتي و (٢) طريقة الشجرة وطريقة الشبكة (أو الجدول):

أولا: إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$
$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $n(S)=6\times6=36$

ثانيا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



ثالثا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

نتيجة الرمية الثانية						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

ملاحظة:

إن (4,3) عنصر من عناصر فضاء العينة وبالتالي فإن (4,3) هي نقطة عينة وذلك لأن $(4,3)\in S$. كما أن النتيجة (4,3) تعني ظهور الرقم 4 في الرمية الأولى وظهور الرقم 3 في الرمية الثانية وهذه النتيجة تختلف عن النتيجة (3,4) والتي تعني ظهور الرقم 3 في الرمية الأولى وظهور الرقم 4 في الرمية الثانية.

(٦-٤) الحادثة أو الحدث: Event:

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S.

- A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A\subseteq S$.
- يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

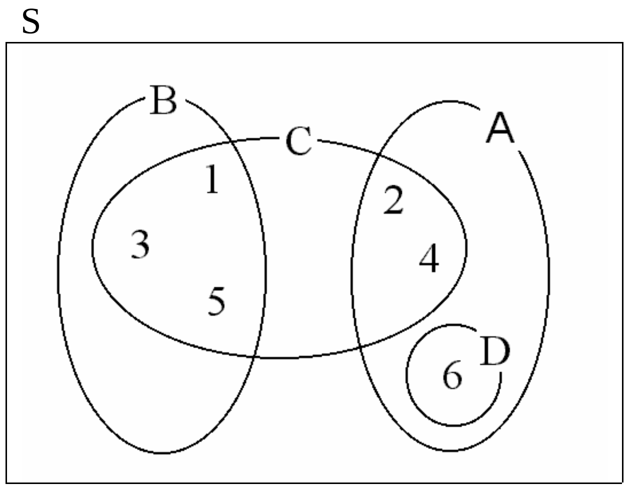
- الحادثة المستحيلة $\phi \subseteq S$. (Impossible Event) حيث أن ϕ هـــي المجموعـــة الخالية.
- الحادثة المؤكدة $S \subseteq S$. (Sure Event)
- يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز n(A). ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانـــت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

مثال (٦-٣):

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجـــه العلـــوي فـــإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S.

الحادثة		عدد العناصر
A = { ظهور عدد زوجي } = {2, 4, 6};	$A \subseteq S$	n(A) = 3
B = { ظهور عدد فردي } = {1, 3, 5};	$B \subseteq S$	n(B) = 3
C = { ظهور عدد أقل من ستة } = {1, 2, 3, 4, 5};	$C \subseteq S$	n(C) = 5
D = { ظهور العدد ستة } = {6};	$D \subseteq S$	n(D) = 1
ϕ = { ظهور عدد سالب } = { };	$\phi \subseteq S$	n(ϕ) = 0
S = { ظهور عدد موجب } = {1, 2, 3, 4, 5, 6};	$S \subseteq S$	n(S) = 6

في هذا المثال يمكن أم نمثل الحوادث بأشكال فن. فالشكل التالي يمثل الحـــوادث A و B و C و D:



تمثيل الحوادث باستخدام أشكال فن

في هذا المثال:

نقول بأن الحادثة A={2,4,6} وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6.

نقول بأن الحادثة D={6} وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6.

وهكذا...

<u>مثال (٦-٤):</u>

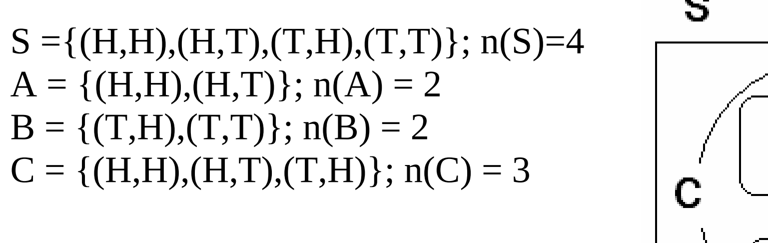
احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

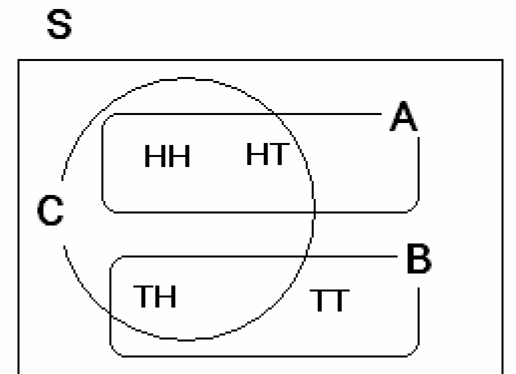
B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

<u>الحل:</u>



S ={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}; n(S)=4
A = {(H,H),(H,T)}; n(A) = 2
B = {(T,H),(T,T)}; n(B) = 2
C = {(H,H),(H,T),(T,H)}; n(C) = 3



<u>مثال (٦-٥):</u>

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و(y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$A = \{ (x,y):\ x + y < 4 \}$

$B = \{ (x,y):\ x = y \}$

$C = \{ (x,y):\ x = 5 \}$

$D = \{ (x,y):\ x+y = 1 \}$

الحل:

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	**(5,6)**	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	**(5,5)**	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	**(5,4)**	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	**(5,3)**	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	**(5,2)**	(6,2)
(1,1)	**(2,1)**	(3,1)	(4,1)	**(5,1)**	(6,1)
⇑ A				⇑ C	

A = { (x,y): $x + y < 4$ } = {(1,1), (1,2), (2,1)}; n(A)=3

B = { (x,y): $x = y$ } = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)} ; n(B)=6

C = { (x,y): $x = 5$ } = {(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)} ; n(C)=6

D = { (x,y): $x+y = 1$ } = { } = ϕ; n(D)=0

(٦-٥) العمليات على الحوادث (جبر الحوادث): Algebra of Events:

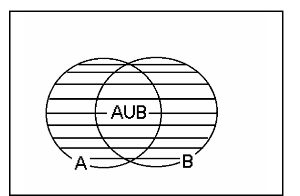
بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث. وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

(أ) اتحاد حادثتين: Union

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معًا. وتقع الحادثة $A\cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معًا.

شكل فن لتمثيل الاتحاد

$A\cup B = \{x \in S: x\in A$ **أو** $x\in B \}$

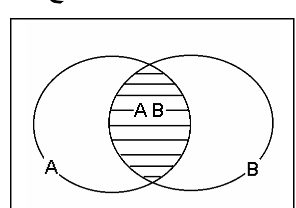


(ب) تقاطع حادثتين: Intersection

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معًا. وتقع الحادثة $A\cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معًا في نفس الوقت.

شكل فن لتمثيل التقاطع

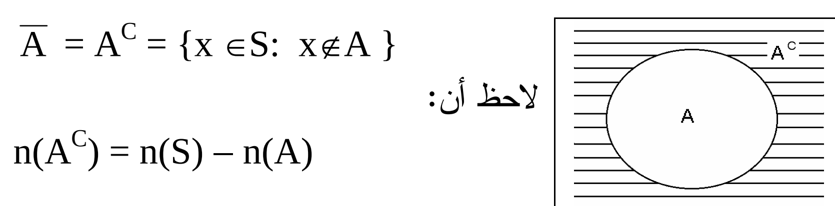
$A \cap B = \{x \in S: x \in A$ و $x \in B\}$



(ج) متممة أو مكملة حادثة: Complement

متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^C أو $\overline{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. وتقع متممة الحادثة $\overline{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

شكل فن لتمثيل المتممة



$\overline{A} = A^C = \{x \in S: x \notin A\}$

لاحظ أن:

$n(A^C) = n(S) - n(A)$

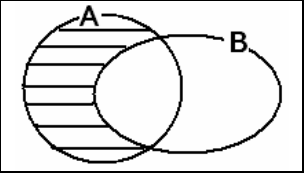
(د) الفرق بين حادثتين: Difference between Two Events:

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A–B وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B. وتقع الحادثة A–B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

شكل فن لتمثيل الفرق

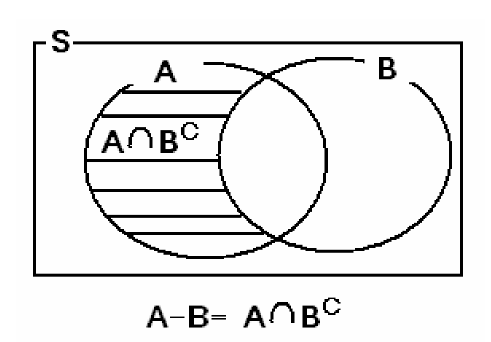


$A - B = \{x \in S: x \in A$ و $x \notin B\}$



نتائج:

- $(A^C)^C = A$
- $S^C = \phi$
- $\phi^C = S$
- $A^C = S - A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap S = A$
- $A \cup S = S$
- $A \cap \phi = \phi$



- $A\cup\phi = A$
- $A\subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$
- $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B = B$

نتيجة:

- $A-B = A\cap B^C$

نتيجة: قانونا دي مورجان:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مثال (٦-٦):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

١. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

٢. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

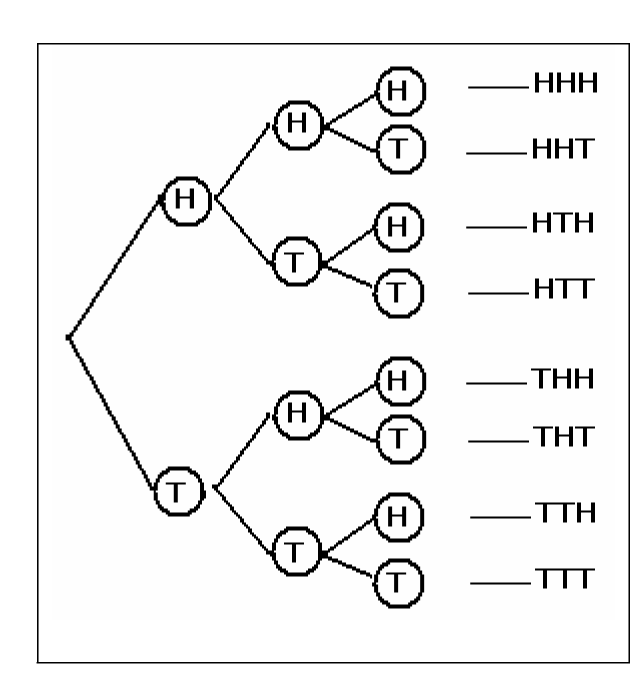
B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

٣. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$$A\cap B,\ A\cup C,\ A^C \cup B^C,\ (A \cap B)^C,\ A\cap B^C$$

الحل:



١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$S =\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

٢.

$A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$

$n(A) =4$

$B=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T), (T,T,H)\}$

$n(B) =7$

$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$

$n(C) =2$

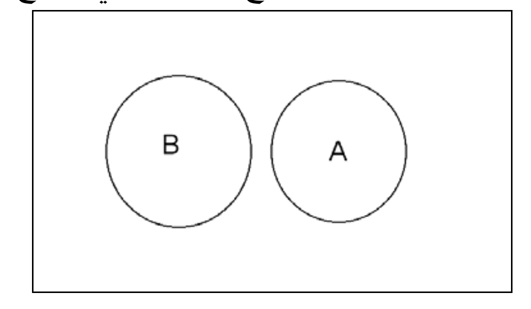
.٣

$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$
$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$
$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$
$A^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$
$B^C = \{(T,T,T)\}$

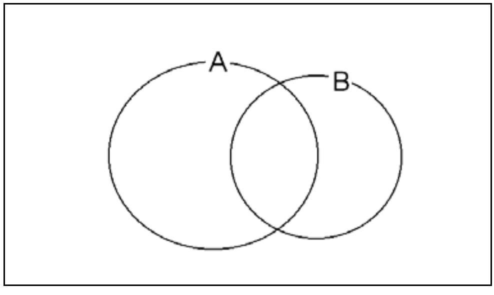
- $A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\};$
  $n(A\cap B) = 4$
- $A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\};$
  $n(A\cup C)=6$
- $A^C \cup B^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$
  $= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n(A^C \cup B^C) = 4$
- $(A \cap B)^C= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n((A \cap B)^C) = 4$
- $A\cap B^C = A - B = \phi$;
  $n(A\cap B^C) = 0$

الحوادث المتنافية (المنفصلة): Disjoint (Mutually Exclusive) Events

يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A\cap B=\phi$. وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معًا أي يستحيل وقوعهما معًا. ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



حادثتان متنافيتان $A\cap B = \phi$



حادثتان غير متنافيتين $A\cap B \neq \phi$

الحوادث الشاملة: Exhaustive Events

يقال بأن الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحده منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

١. الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

- متنافيتان لأن: $A \cap B \neq \phi$.
- شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$.

٢. الحوادث $A_1=\{1,2,3\}$ و $A_2=\{2,3,4\}$ و $A_3=\{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص: Equally Likely Outcomes:

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهـور أي نتيجـة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة. فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T). وكذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصـة ظهـور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6. وعليه فإن كلا التجربتين المذكرتين متساوية الفرص.

الحالات المواتية للحادثة:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

(٦-٦) الاحتمال: Probability:

نقرن كل حادثة (أو حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصـة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة. تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

احتمال الحادثة: Probability of An Event

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز P(A) ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

التعريف التقليدي للاحتمال: Classical Definition of Probability

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي n(S) فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

مثال (٦-٧):

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة المعطى في مثال (٦-٣).

الحل:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=6 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {2, 4, 6}	n(A) = 3	P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 =0.5
B = {1, 3, 5}	n(B) = 3	P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 =0.5
C = {1, 2, 3, 4, 5}	n(C) = 5	P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 =0.8333
D = {6}	n(D) = 1	P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 =0.1667
ϕ = { }	n(ϕ) = 0	P(ϕ) = n(ϕ)/n(S) = 0/6 =0.0
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = 6	P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0

مثال (٦-٨):

احسب احتمالات الحوادث في مثال (٦-٤) لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين:

الحل:

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=4 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {(H,H),(H,T)}	n(A) = 2	P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 =0.5
B = {(T,H),(T,T)}	n(B) = 2	P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 =0.5
C = {(H,H),(H,T),(T,H)}	n(C) = 3	P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 =0.75

ملاحظة:

إن من عيوب التعريف التقليدي للاحتمال أنه لا ينطبق على جميع أنواع التجارب العشوائية. إذ أنه مبني على تساوي الفرص لنتائج التجربة وعلى محدودية عدد عناصر فضاء العينة وهذا لا ينطبق على جميع التجارب العشوائية. لذلك فإننا فيما يلي نعطي تعريفاً آخر للاحتمال وهو ما يسمى بالتعريف التكراري النسبي للاحتمال.

التعريف التكراري النسبي للاحتمال Relative Frequency Probability:

إذا كررنا إجراء تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحادثة A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحادثة A بناءً على التعريف التكراري النسبي يعطى بالصيغة التالية:

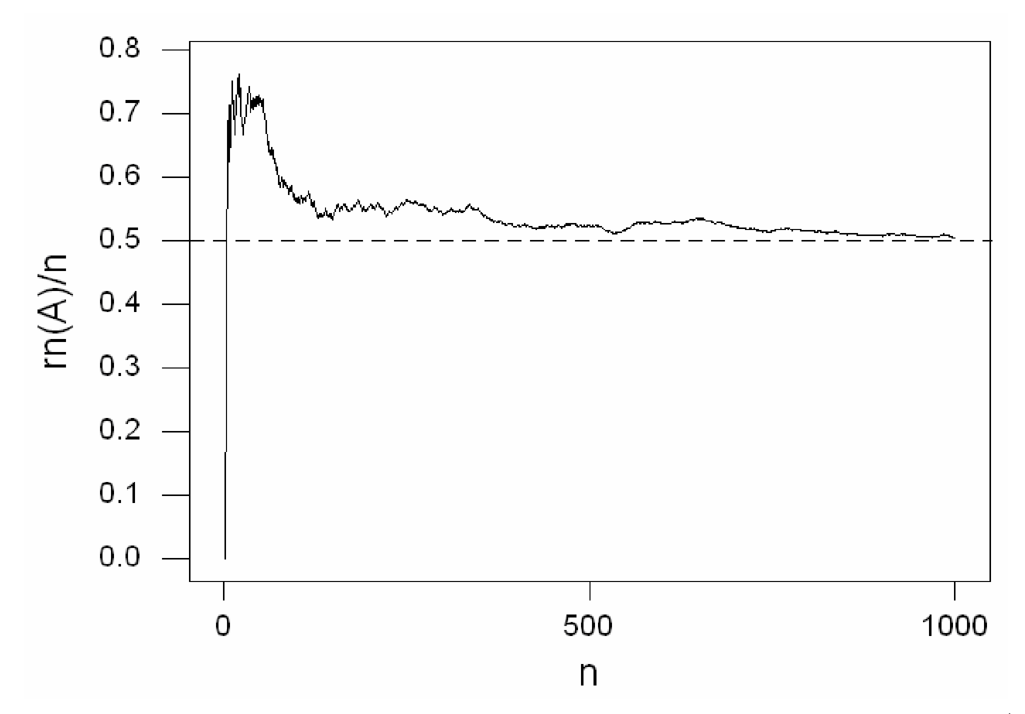
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n}$$

لاحظ أن $\frac{r_n(A)}{n}$ هو التكرار النسبي لعدد مرات وقوع الحادثة A عن تكرار إجراء التجربة n مرة وبالتالي فإن احتمال الحادثة A هو هذا التكرار النسبي عندما نكرر إجراء التجربة ما لا نهاية من المرات.

مثال:

لنعرف الحادثة A على أنها الحادثة الدالة على ظهور الصورة في تجربة قذف العملة المتزنة. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة 1000 مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الصورة عند المحاولة رقم n. قمنا بمحاكاة هذه العملية باستخدام الحاسب الآلي فحصلنا على الشكل أدناه. وهذا الشكل يبين لنا بوضوح حقيقة أنه للعملة المتزنة فإن:

$$P(A) = P(H) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n} = 0.5$$



ملاحظة:

بالرغم من أن التعريف التكراري النسبي للاحتمال مفيد وعام لأي نوع من أنواع التجارب العشوائية إلا أننا لا نستطيع التأكد من أننا سوف نحصل على النسبة نفسها لو كررنا إجراء التجربة n مرة في وقت آخر. كذلك فإنه من الصعب جدًا تطبيق هذا التعريف لأنه يعتمد على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات. كما أن هذا التعريف له بعض الصعوبات من الجهة الرياضية إذ قد لا توجد النهاية. ولهذه الأسباب فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال والذي يعتمد على بعض المسلمات الأساسية.

(٦-٧) مسلمات (بديهيات) الاحتمال: Axioms of Probability:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية P(.) والمعرفة لجميع الحوادث المعرفة على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد P(A) باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت المسلمات التالية:

١. لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$

٢. $P(S) = 1$

٣. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \ldots$ حوادث متنافية (منفصلة) مثنى مثنى (أو تبادليًا) أي إذا كان $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

ملاحظة:

المسلمة رقم (٣) تعني أن احتمال إتحاد متتالية غير منتهية من الحوادث المتنافية تبادليًا يساوي مجموع احتمالاتها.

النتائج التالية هي بعض نتائج مسلمات الاحتمال الثلاث السابقة.

بعض نتائج مسلمات الاحتمال:

١. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$P(\phi) = 0$$

٢. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية (منفصلة) تبادليًا فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

٣. لأي حادثة A يكون:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

٤. لأي حادثتين A و B يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

٥. لأي حادثتين A و B يكون:

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

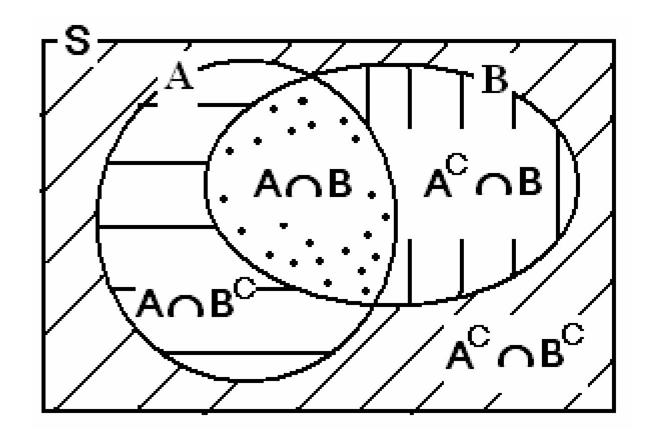
$$\Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

٦. إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

ملاحظة حول الاحتمالات المتعلقة بحادثتين:

يمكن تمثيل احتمالات الحوادث بالمساحات في شكل فن. فمساحة المستطيل الذي يمثل الحادثة المؤكدة أو فضاء العينة S تساوي الواحد الصحيح. ونمثل احتمال أي حادثة أخرى بمساحة المنطقة التي تمثلها هذه الحادثة في شكل فن منسوبًا إلى المساحة الكلية للمنطقة التي تمثلها الحادثة المؤكد. والشكل التالي يبين بعض الحالات المهمة:



لاستنباط القوانين المتعلقة باحتمالات حادثتين فإننا نحاول تمثيل الحادثة المطلوب إيجاد الاحتمال لها كإتحاد حوادث متنافية لكي نستطيع تطبيق النتيجة الثانية لمسلمات الاحتمال المذكورة أعلاه. فعلى سبيل المثال، القوانين التالية يمكن بسهوله استنباطها من شكل فن:

- $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$
- $P(B) = P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
- $P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B)$
- $P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(A^C\cap B)$
  $= P(B) + P(A\cap B^C)$
  $= P(A\cap B^C) + P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
- $P(A^C\cap B^C) = 1 - P(A\cup B)$

أمثلة متنوعة

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

A^C = {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}^{C} = {عدم نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

= {رسوب محمد في مقرر الإحصاء}

المعطيات: $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B=$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B=$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

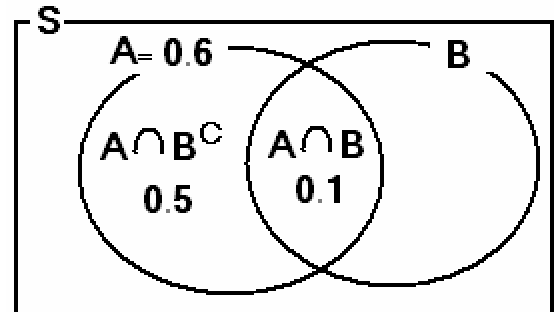
$B^C=$ { رسوب أحمد في الاختبار }

$A\cap B^C=$ { نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار }

المعطيات: $P(A) = 0.6$ و $P(A\cap B) = 0.1$

المطلوب:

$$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$$



مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B=$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B=$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

B^C = { رسوب أحمد في الاختبار }

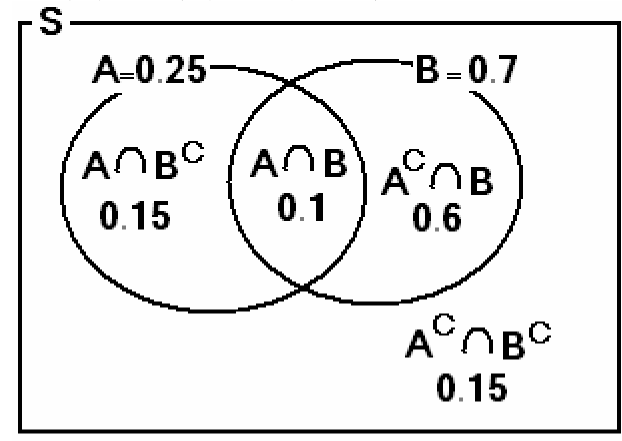
$A \cup B$ = { نجاح أحدهما على الأقل } = { نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار }

المعطيات: $P(A) = 0.25$ و $P(B^C) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.3 = 0.7$$

المطلوب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$$



مثال:

إذا كان احتمال أن فصيلة دم أحد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0.35 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم أو أن فصيلة دمه من النوع A هو 0.40. أوجد احتمال أن هذا المتبرع:

١. مصاب بضغط الدم وفصيلة دمه من النوع A.

٢. غير مصاب بضغط الدم.

الحل:

لنعرف الحادثتين: A: فصيلة دم المتبرع من النوع A.

B: المتبرع مصاب بضغط الدم.

المعطيات: $P(A \cup B) = 0.40, \quad P(B) = 0.15, \quad P(A) = 0.35$

المطلوب:

١. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.35 + 0.15 - 0.40 = 0.10$

٢. $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$

مثال:

في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلـــوي لنعـــرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد أقل من أو يساوي 2

عرف الحوادث التالية واحسب احتمالها:

$$A, B, A\cap B, A\cup B, A\cap B^C, A^C\cap B, (A\cup B)^C, A^C\cap B^C$$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهي تجربة متساوية الفـــرص وعـــدد عناصر فضاء العينة محدود ويساوي $n(S) = 6$.

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A=\{2,4,6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6$
$B= \{1, 2\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/6$
$A\cap B=\{2\}$	$n(A\cap B) = 1$	$P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S) = 1/6$
$A\cup B=\{1,2,4,6\}$	$n(A\cup B) = 4$	$P(A\cup B) = n(A\cup B)/n(S) = 4/6$
$A\cap B^C=\{4,6\}$	$n(A\cap B^C) =2$	$P(A\cap B^C) = n(A\cap B^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B=\{1\}$	$n(A^C\cap B)=1$	$P(A^C\cap B) = n(A^C\cap B)/n(S) = 1/6$
$(A\cup B)^C=\{3,5\}$	$n((A\cup B)^C) =2$	$P((A\cup B)^C) = n((A\cup B)^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B^C=\{3,5\}$	$n(A^C\cap B^C) =2$	$P(A^C\cap B^C) = n(A^C\cap B^C)/n(S) = 2/6$

كما نلاحظ أنه بالإمكان إيجاد احتمالات بعض الحوادث أعلاه باستخدام القواعد التي ذكرناها آنفاً:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$$
$$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 3/6 - 1/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 2/6 - 1/6 = 1/6$$
$$P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 4/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 4/6 = 2/6$$

مثال:

إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4, P(A\cup B) = 0.5$$

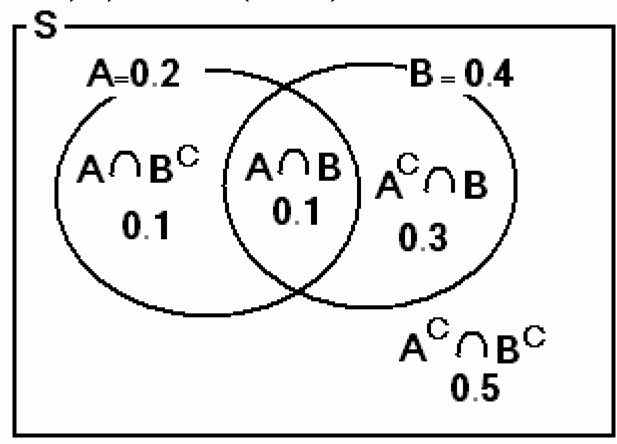
أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A\cap B),\quad P(A\cap B^C),\quad P(A^C\cap B),\quad P(A^C\cap B^C)$$

الحل:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$$

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$
$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$
$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$



مثال:

إذ اخترنا ورقتين من أوراق اللعب بشكل عشوائي وبدون مراعاة الترتيب فما هو احتمال أن يكون لوناهما أسود؟

الحل:

عدد الأوراق الكلية = 52 ورقة

عدد الأوراق التي لونها أسود = 26 ورقة

التجربة هي اختيار ورقتين من 52 ورقة

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(S)$ = عدد عناصر فضاء العينة = عدد طرق اختيار ورقتين من 52 ورقة

$$= \binom{52}{2}$$

لتكن الحادثة A هي الحادثة الدالة على الحصول على ورقتين لونهما أسود

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(A)$ = عدد عناصر الحادثة A = عدد طرق اختيار ورقتين من 26 ورقة سوداء

$$= \binom{26}{2}$$

ولأن التجربة متساوية الفرص فإن:

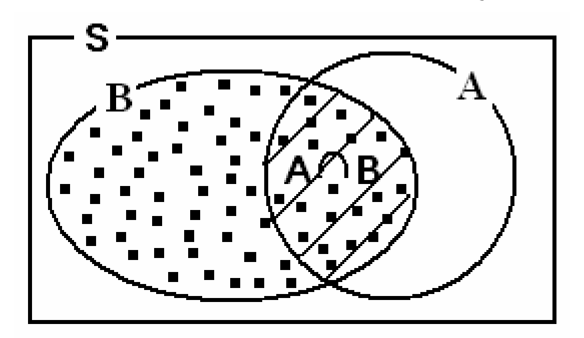
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{\left(\frac{26!}{2!\times 24!}\right)}{\left(\frac{52!}{2!\times 50!}\right)}=\frac{\left(\frac{26\times 25\times 24!}{2\times 24!}\right)}{\left(\frac{52\times 51\times 50!}{2\times 50!}\right)}=\frac{26\times 25}{52\times 51}=0.245$$

(٦-٨) الاحتمال الشرطي: Conditional Probability:

نواجه في كثير من التطبيقات العملية بعض الحالات التي نرغب فيها بإيجاد احتمال حادثة معينة A بعد معرفتنا بوقوع حادثة معينة أخرى B. أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة A مشروطًا بوقوع الحادثة B. فمثلاً قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:

١. احتمال وقوع حادث مروري لأحد السائقين إذا علمنا بأنه قد قام بالتأمين على السيارة.
٢. احتمال أن يستمر أحد الأجهزة الكهربائية في العمل لمدة 100 يومًا قادمة علمًا بأن هذا الجهاز ظل عاملاً لمدة 30 يومًا الماضية.
٣. احتمال أن يصاب الشخص بالمرض علمًا بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد هذا المرض.

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوبًا إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B.



تعريف: (الاحتمال الشرطي):

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B)\neq 0$. إن الاحتمال الشرطي للحادثة A علمًا (أو مشروطًا) بوقوع الحادثة B (أو معطى حدوث الحادثة B) يرمز له بالرمز $P(A|B)$ ويعرف كما يلي:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ملاحظات:

١. مقياس الاحتمال الشرطي $P(\bullet|B)$ يحقق مسلمات الاحتمال ونتائجها.

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة B معطى A هو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

٣. بشكل عام فإن: $P(A|B) \neq P(B|A)$

نتائج:

١. إذا كانت عناصر فضاء العينة S متساوية الفرص فإن:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة A^C (متممة A) معطى B يمكن حسابه بالقانون التالي:

$$P(A^C| B) = 1 - P(A| B)$$

٣. قاعدة الضرب في الاحتمال:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B | A) = P(B)\, P(A | B)$$

مثال (٦-٩):

الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

			عادة التدخين		
			يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مستوى	مرتفع	A	40	10	50
ضغط	متوسط	B	70	130	200
الدم	منخفض	C	55	95	150
	المجموع		165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : حادثة اختيار شخص مدخن

المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:

١. ضغط دمه مرتفع.
٢. مدخن.
٣. ضغط دمه مرتفع و يدخن.
٤. ضغط دمه مرتفع علمًا بأنه مدخن.

الحل:

عدد نتائج التجربة $n(S) = 400$ وهي متساوية الفرص.

١. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$

٢. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$

٣. $P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$

٤. $P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو

$P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

(٦-٩) الحوادث المستقلة: Independent Events:

في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى B. أي لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A معطى B. أي أن $P(A|B)=P(A)$. وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

تعريف:

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S. يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

مثال (٦-١٠):

هل الحادثتان A و D في مثال (٦-٩) مستقلتان؟ ولماذا؟

الحل:

إن الحادثتين A و D في مثال (٦-٩) غير مستقلتين وذلك لأن:

- $P(A) = 0.125 \neq P(A|D) = 0.2424$

- $P(A \cap D) = 0.1 \neq P(A)\,P(D) = 0.125 \times 0.4125 = 0.0516$
- $P(D) = 0.4125 \neq P(D|A) = 0.8$

<u>نتيجة:</u>

العبارات التالية متكافئة:

١. الحادثتان A و B مستقلتان.

٢. الحادثتان A و B^C مستقلتان.

٣. الحادثتان A^C و B مستقلتان.

٤. الحادثتان A^C و B^C مستقلتان.

<u>مثال (٦-١١):</u>

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. سحبت عينة مكونة من كرتين من هذا الصندوق واحدة بعد الأخرى عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض في كلا الحالتين التاليتين:

١. إذا كان السحب بدون إرجاع

٢. إذا كان السحب بإرجاع

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

A = { الكرة الأولى لونها أبيض }

B = { الكرة الثانية لونها أبيض }

$A \cap B$ = { الكرتان لونهما أبيض }

إن المطلوب هو إيجاد $P(A \cap B)$. وسوف نوجد هذا الاحتمال لكلا الحالتين بطريقتين مختلفتين هما: (١) قاعدة الضرب للاحتمال و(٢) قاعدة التباديل.

أولاً: باستخدام قاعدة الضرب للاحتمال $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$:

١. حالة السحب بدون إرجاع:

I		II	
R	W	R	W
10	20	10	19
30		29	

$P(A) = \frac{20}{30}$

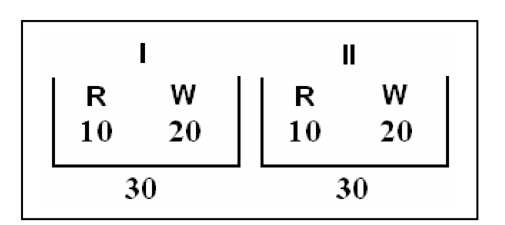
$P(B \mid A) = \frac{19}{29}$

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{19}{29} = 0.4368$

$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{20}{30}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{20}{30} = 0.4444$$



ثانياً: باستخدام قاعدة التباديل:

- عدد طرق سحب كرتين من ثلاثين كرة = n(S)
- عدد طرق سحب كرتين من عشرين كرة بيضاء = $n(A \cap B)$
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(S)$

١. حالة السحب بدون إرجاع:

$$n(S) = {}_{30}P_2 = 30 \times 29$$

$$n(A \cap B) = {}_{20}P_2 = 20 \times 19$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 19}{30 \times 29} = 0.4368$$

٢. حالة السحب بإرجاع:

$$n(S) = 30^2 = 30 \times 30$$

$$n(A \cap B) = 20^2 = 20 \times 20$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 20}{30 \times 30} = 0.4444$$

مثال (٦-١٢):

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. اخترنا عينة مكونة من 4 كرات من هذا الصندوق عشوائيًا دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء.

الحل:

لنعرف الحادثة A على أنها حادثة الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء

- عدد طرق اختيار 4 كرات من ثلاثين كرة = n(S)
- عدد طرق اختيار على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء = n(A)
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A) = n(A)/n(S)$

$$n(S) = \binom{30}{4}$$

$$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{20}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

(٦-١٠) نظرية بايز : Bayes' Theorem:

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع أحدها إلى حدوث حادثة ما. وهذه الحادثة تقع إذا وقع أحد أسبابها. ولنفرض أننا نعلم مسبقًا احتمال تحقق كل سبب من هـذه الأسباب وكذلك نعلم الاحتمال الشرطي لهذه الحادثة عند تحقق كل سبب من أسبابها. إن نظريـة بايز تعنى بحساب احتمال أن يكون سببًا محددًا من الأسباب هو مصدر حدوث هذه الحاثة والتـي نعلم مسبقًا بحدوثها. وقبل استعراض نظرية بايز فإنه لابد من التطرق لما يسمى بقانون الاحتمال الكلي الذي يعنى بحساب وقوع هذه الحادثة بغض النظر عن السبب.

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law:

لتكن الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة علـى فضاء العينة S، أي أن:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall \ i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B|A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B\,|\,A_k)$$

ملاحظة:

١. يمكن استنباط هذا القانون بشكل فن التالي (للحالة n=3):

- $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$
  $= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi, \ \forall\, i \neq j$
- $P(B) = P\{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)\}$
  $= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k)$

S
A1 A1∩B
A2 A2∩B
A3 A3∩B
B

٢. يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):

A_1 ---- $P(A_1)$ ---- $B \mid A_1$ ---- $P(B|A_1)$ ---- $\Rightarrow P(A_1)\,P(B|A_1)$

A_2 ---- $P(A_2)$ ---- $B \mid A_2$ ---- $P(B|A_2)$ ---- $\Rightarrow P(A_2)\,P(B|A_2)$

A_3 ---- $P(A_3)$ ---- $B \mid A_3$ ---- $P(B|A_3)$ ---- $\Rightarrow P(A_3)\,P(B|A_3)$

المجموع $= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B \mid A_k)$

مثال (٦-١٣):

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى 20% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية 30% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للمصنع. ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي 1% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي 4% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح تالف؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = { المصباح تالف };

A_1 ={ المصباح من إنتاج الآلة الأولى };

A_2 ={ المصباح من إنتاج الآلة الثانية };

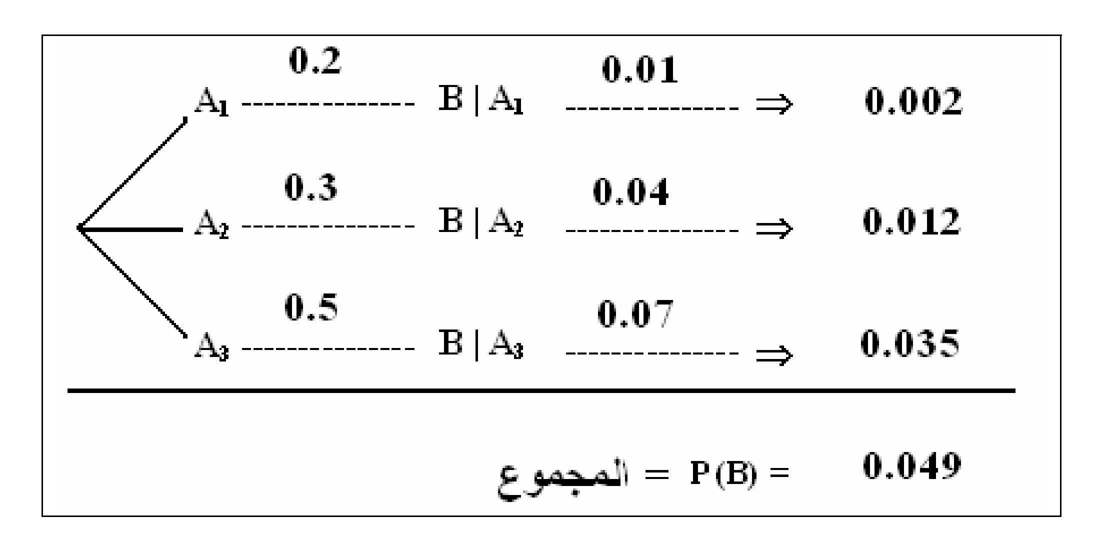
A_3 ={ المصباح من إنتاج الآلة الثالثة };

المعطيات:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2; \quad P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3; \quad P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$
$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5; \quad P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

المطلوب:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k)$$
$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$= 0.2\times0.01 + 0.3\times0.04 + 0.5\times0.07$$
$$= 0.002 + 0.012 + 0.035$$
$$= 0.049$$



مثال (٦-١٤):

باعتبار المثال السابق، مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفاً، فما هو احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟

الحل:

إن المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$ وباستخدام التعريف الشرطي وقانون الضرب للاحتمال فإن:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.049} = \frac{0.002}{0.049} = 0.0408$$

إن القانون المستخدم لحل هذا المثال ما هو إلا قانون بايز الذي سنستعرضه فيما يلي.

قانون بايز : Bayes' Theorem:

لتكن الحوادث $A_1,A_2,\dots,A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة علـــى فضاء العينة S، أي أن:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\, i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$$

ملاحظة:

يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):

A_1 --------------- $P(A_1)$ --------------- $B \mid A_1$ --------------- $P(B|A_1)$ --------------- $\Rightarrow P(A_1)\,P(B|A_1)$

A_2 --------------- $P(A_2)$ --------------- $B \mid A_2$ --------------- $P(B|A_2)$ --------------- $\Rightarrow P(A_2)\,P(B|A_2)$

A_3 --------------- $P(A_3)$ --------------- $B \mid A_3$ --------------- $P(B|A_3)$ --------------- $\Rightarrow P(A_3)\,P(B|A_3)$

المجموع $= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B \mid A_k)$

$P(A_1)\,P(B|A_1) \div P(B) = P(A_1 \mid B)$

مثال (٦-١٥):

باعتبار مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفًا، فما هو احتمال:

١. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟
٢. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية؟
٣. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟

الحل:

1.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.01}{0.049}=\frac{0.002}{0.049}=0.0408$$

2.

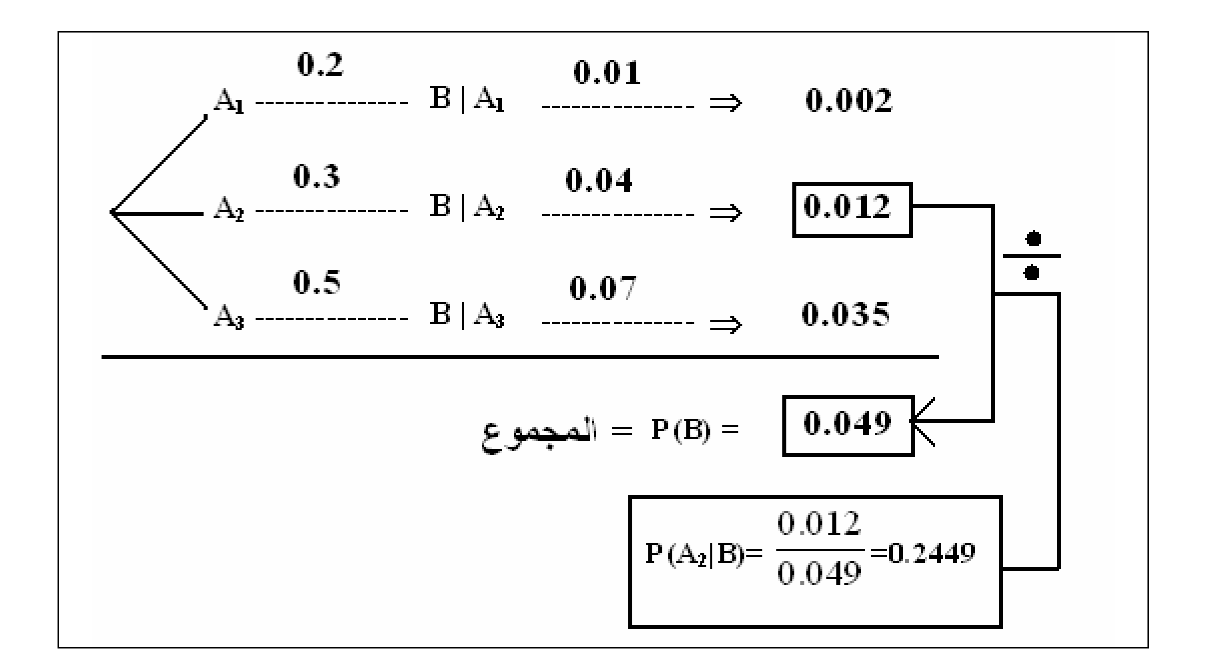
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.04}{0.049}=\frac{0.012}{0.049}=0.2449$$

3.

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.07}{0.049}=\frac{0.035}{0.049}=0.7142$$

في هذا المثال، نلاحظ أنه لو كان المصباح المختار تالفاً فإن الاحتمال الأكبر أن يكون من إنتاج الآلة الثالثة.

ويمكن تلخيص استخدام قانون بايز لحل فقرة (٢) مثلاً في هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية:



مثال (٦-١٦):

لنفرض أن لدينا صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء، بينما يحتوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء. اخترنا صندوق من هاذين الصندوقين بشكل عشوائي ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي.

١. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

٢. إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = { الكرة المسحوبة سوداء };

A_1 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الأول };

A_2 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الثاني };

المعطيات:

$$P(A_1) = 0.5; \quad P(B|A_1)= \frac{6}{10} = 0.6$$

$$P(A_2) = 0.5; \quad P(B|A_2)= \frac{8}{16} = 0.5$$

المطلوب:

1. $P(B) = \sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)$

$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)$

$= 0.5\times0.6 + 0.5\times0.5 = 0.3 + 0.25$

$= 0.55$

2. $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)}=\dfrac{0.5\times0.5}{0.55}=\dfrac{0.25}{0.55}=0.4545$

يمكن تلخيص حل هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية:

